Reg. No. : ....

Code No. : 30342 B **Sub. Code : JMMA 63/ JMMC 63**

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2020.

Sixth Semester

Mathematics/Mathematics with CA – Main

NUMBER THEORY

(For those who joined in July 2016 only)

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer :

1. குறைவற்ற முழுக்களைக் கொண்ட எந்த ஒரு வெற்றற்ற கணமும் ———— உறுப்பைக் கொண்டிருக்கும்.

(அ) மீச்சிறு (ஆ) மீப்பெரு

(இ) பூஜ்யம் (ஈ) முடிவிலி

Every non empty set S of nonnegative integers contains a ———— element.

(a) least (b) greatest

(c) zero (d) infinity

2. $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+....=$

(அ) 2^{n} (ஆ) 2^{n-1}

(இ) 2^{n+1} (ஈ) 0

$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+....=$

(a) 2^{n} (b) 2^{n-1}

(c) 2^{n+1} (d) 0

3. t_n என்பது n–வது முக்கோண எண் எனில் $t_n =$

(அ) $\binom{n}{2}$ (ஆ) $\binom{n-1}{2}$

(இ) $\frac{n+1}{2}$ (ஈ) $\binom{n+1}{2}$

If t_n is the nth triangular number, then $t_n =$

(a) $\binom{n}{2}$ (b) $\binom{n-1}{2}$

(c) $\frac{n+1}{2}$ (d) $\binom{n+1}{2}$

4. மீ.சி.ம $(a, b) = ab$ என இருக்கத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை ——————.

(அ) மீ.பொ.வ $(a, b) = 1$

(ஆ) மீ.பொ.வ $(a, b) = a$

(இ) மீ.பொ.வ $(a, b) = b$

(ஈ) மீ.பொ.வ $(a, b) = ab$

$\mathrm{lcm}(a, b) = ab$ if and only if ——————.

(a) $\gcd(a, b) = 1$ (b) $\gcd(a, b) = a$

(c) $\gcd(a, b) = b$ (d) $\gcd(a, b) = ab$

5. $5^{\#} + 1$ = ——————.

(அ) 5 (ஆ) 6

(இ) 11 (ஈ) 31

$5^{\#} + 1$ = ——————.

(a) 5 (b) 6

(c) 11 (d) 31

6. 360-ன் நியமன வடிவம் ——————.

(அ) 300 + 60 +0 (ஆ) 3 + 6 + 0

(இ) 5 × 8 × 9 (ஈ) $2^3.3^2.5$

The canonical form of 360 is ————.

(a) $300 + 60 + 0$ (b) $3 + 6 + 0$

(c) $5 \times 8 \times 9$ (d) $2^3.3^2.5$

7. $1!+2!+...+100!$ -ஐ 12-ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் மீதி ————.

(அ) 0 (ஆ) 9

(இ) 11 (ஈ) 1

The remainder when we divide $1!+2!+...+100!$ by 12 is ————.

(a) 0 (b) 9

(c) 11 (d) 1

8. $-15 \equiv$ ———— $(\bmod 7)$.

(அ) 64 (ஆ) –20

(இ) –64 (ஈ) 0

$-15 \equiv$ ———— $(\bmod 7)$.

(a) 64 (b) –20

(c) –64 (d) 0

9. p மற்றும் q வெவ்வேறு பகா எண்கள் மற்றும் $a^p \equiv a(\bmod q)$, $a^q \equiv a(\bmod p)$ எனில் $a^{pq} \equiv$ ———— $(\bmod pq)$.

(அ) a^2 (ஆ) 1

(இ) a (ஈ) 0

If p and q are distinct primes with $a^p \equiv a \pmod{q}$ and $a^q \equiv a \pmod{p}$, then $a^{pq} \equiv$ ———— $(\text{mod } pq)$

(a) a^2 (b) 1

(c) a (d) 0

10. மீச்சிறு பொய்மை பகா எண் ————.

(அ) 2 (ஆ) 101

(இ) 341 (ஈ) 1001

The least pseudoprime is ————.

(a) 2 (b) 101

(c) 341 (d) 1001

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) முடிவறு மறுதருவித்தலின் முதலாவது தத்துவத்தைக் கூறி நிரூபி.

State and prove the first principle of finite induction.

Or

(ஆ) பாஸ்கல்–ன் விதியை கூறி நிறுவுக.

State and prove Pascal's rule.

12. (அ) எந்த ஒரு $a \geq 1$ -க்கும் $a(a^2+2)/3$ ஒரு முழு எண் என நிரூபி.

Prove that $a(a^2+2)/3$ is an integer for all $a \geq 1$.

Or

(ஆ) யூக்ளிடியன் வழிமுறையைப் பயன்படுத்தி மீ.பொ.வ (12378, 3054) காண்.

Find g.c.d. (12378, 3054) using Euclidean algorithm.

13. (அ) பகா எண்களின் எண்ணிக்கை முடிவில்லாதது என நிரூபி.

Show that the number of primes is infinite.

Or

(ஆ) p_n என்பது n -வது பகா எண் எனில் $p_n \leq 2^{2^{n-1}}$ எனக் காட்டுக.

If p_n is the nth prime number, prove that $p_n \leq 2^{2^{n-1}}$.

14. (அ) $ca \equiv cb (\bmod n)$ எனில் $a \equiv b\left(\bmod \frac{n}{d}\right)$, $d =$ மீ.பொ.வ (c, n) என நிரூபி.

If $ca \equiv cb (\bmod n)$, then prove that $a \equiv b\left(\bmod \frac{n}{d}\right)$, where $d = \gcd(c, n)$.

Or

(ஆ) $9x \equiv 21 (\bmod 30)$ என்ற நேரியல் சர்வ சமன்பாட்டைத் தீர்.

Solve the linear congruence $9x \equiv 21 (\bmod 30)$.

15. (அ) பெர்மாட்-ன் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove Fermat's theorem.

Or

(ஆ) 12499-ஐ காரணிபடுத்துக.

Factorize the number 12499.

PART C — ($5 \times 8 = 40$ marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) (i) ஆர்க்கிமிடியன் பண்பைக் கூறி நிறுவுக.

(ii) நியூட்டனின் சமன்பாட்டை வருவி.

(i) State and prove the Archimedean Property.

(ii) Derive Newton's identity.

Or

(ஆ) ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைக் கூறி நிரூபி.

State and prove the binomial theorem.

17. (அ) a மற்றும் b ஆகியன இரண்டும் பூஜ்யமாகாத முழுக்கள் எனில் மீ.பொ.வ $(a, b) = ax + by$ என அமையுமாறு இரு எண்கள் x மற்றும் y இருக்கும் என நிரூபி.

Given integers a and b, not both of which are zero, show that there exist integers x and y such that $\gcd(a, b) = ax + by$.

Or

(ஆ) ஒரு வாடிக்கையாளர் ரூ. 132-க்கு ஆப்பிள் மற்றும் ஆரஞ்சு பழங்கள் 12 வாங்குகிறார். ஒரு ஆப்பிள் பழத்தின் விலை ஒரு ஆரஞ்சு பழத்தின் விலையை விட ரூ. 3 அதிகம் ஆகும். மேலும் ஆப்பிள்களின் எண்ணிக்கை ஆரஞ்சுளின் எண்ணிக்கையை விட அதிகம் எனில் ஒவ்வொரு வகையிலும் எத்தனை பழங்கள் வாங்கினார்?

A customer bought a dozen pieces of fruit, 12 apples and oranges for Rs. 132. If an apple costs Rs. 3 more than an orange and more apples than oranges were purchased, how many pieces of each kind were bought?

18. (அ) கணித அடிப்படைத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove the fundamental theorem of arithmetic.

Or

(ஆ) (i) $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறா எண் என நிரூபி.

(ii) $4n+3$ என்ற வடிவில் எண்ணற்ற பகா எண்கள் இருக்கும் எனக்காட்டுக.

(i) Prove that $\sqrt{2}$ is irrational.

(ii) Show that there are an infinite number of primes of the form $4n+3$.

19. (அ) $ax \equiv b (\mathrm{mod}\, n)$ என்ற நேரியல் சர்வ சமன்பாட்டிற்கு ஒரு தீர்வு இருக்கத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $d|b$, $d =$ மீ.பொ.வ (a, n) என நிரூபி. மேலும் $d|b$ எனில் ஒன்றுக்கொன்று சர்வசமமற்ற d தீர்வுகள் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

Prove that the linear congruence $ax \equiv b (\mathrm{mod}\, n)$ has a solution if and only if $d|b$ where $d = \gcd(a, n)$. If $d|b$, then it has d mutually incongruent solutions modulo n.

Or

(ஆ) சைனீசின் மீதி தேற்றத்தைக் கூறி நிரூபி.

State and prove Chinese reminder theorem.

20. (அ) p ஓர் ஒற்றைப் பகா எண் என்க. $x^2+1=0(\bmod p)$ என்ற இருபடி சர்வ சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு அமைய தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $p \equiv 1(\bmod 4)$ எனக் காட்டுக.

Let p be an odd prime. Prove that the quadratic congruence $x^2+1=0(\bmod p)$ has a solution if and only if $p \equiv 1(\bmod 4)$.

Or

(ஆ) வில்சனின் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove Wilson's theorem.

———————